

3学年数学 定期テスト② 模範解答・解説

過去問リメイク版（2023・2024・2025年度 出題内容より／数値変更） 範囲：因数分解・平方根

【配点】合計 100点 / 小問 37問

知識・技能＝64点：知技1（2点×5＝10）・知技2（2点×6＝12）・知技3（3点×4＝12）・知技4（3点×6＝18）・知技5（3点×4＝12）

思考・判断・表現＝36点：考1（3点×3＝9）・考2（3点×2＝6）・考3（3点×2＝6）・考4（3点×2＝6）・考5（3点×1＝3）・考6（3点×2＝6）

知技 1 正誤の判定 [各2点／計10点]

①	○	「a の平方根」は2乗してaになる数で、正と負の2つある。 $6^2=36$ 、 $(-6)^2=36$ なので ± 6 で正しい。
②	± 3	まず $\sqrt{81}=9$ 。聞かれているのは「9 の平方根」なので ± 3 。 検算： $3^2=9$ 、 $(-3)^2=9$ ○ $\sqrt{81}$ をそのまま 81 と読みちがえて ± 9 としないこと。この問題は毎年出る引っかけ。
③	7	記号 $\sqrt{\quad}$ は正の平方根だけを表す。49 の平方根は ± 7 だが、 $\sqrt{49}$ は 7 のみ。
④	○	$0.4^2=0.16$ であり、 $\sqrt{\quad}$ は正のほうなので $\sqrt{0.16}=0.4$ 。正しい。
⑤	6	先に中を計算する。 $(-6)^2=36$ だから $\sqrt{36}=6$ 。 一般に $\sqrt{a^2}$ は「a の絶対値」になる。a が負のときは符号が変わることに注意。

知技 2 平方根の基本 [各2点／計12点]

(1)	$3\sqrt{5}$	$45=9\times 5=3^2\times 5 \rightarrow \sqrt{45}=\sqrt{3^2\times 5}=3\sqrt{5}$ （最簡の形）。「 $\sqrt{\quad}$ 」の中を素因数分解して、2個ずつ外に出す
(2)	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	先に $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ と簡単にしてから有理化する。 $\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ （分母に $\sqrt{\quad}$ が残っていないことを必ず確認）
(3)	$-\sqrt{5} < -2 < -\sqrt{3} < -1.5$	すべて $\sqrt{\quad}$ の形にそろえて比べる。 $-2=-\sqrt{4}$ 、 $-1.5=-\sqrt{2.25}$ 。 中の数は $5 > 4 > 3 > 2.25$ だが、負の数は中が大きいほど小さいので順番が逆になる。 検算（概数）： $-2.24 < -2 < -1.73 < -1.5$ ○
(4)	2個	$\sqrt{0.04}=0.2$ （有理数）、 $\sqrt{7}$ （無理数）、 π （無理数）、 $\frac{3}{4}$ （有理数）、 $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5$ （有理数）、 0 （有理数）、 $-\sqrt{9}=-3$ （有理数）。 $\sqrt{\quad}$ がついていても、中が平方数なら有理数になる。見た目ではなく計算してから判断する。

(5)	6個	各辺は正なので2乗してよい。 $3^2 < a < 4^2 \rightarrow 9 < a < 16$ 。 a=10、11、12、13、14、15 の 6個 。(9 と 16 は不等号が < なのでふくまない)
(6)	n=5	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 。すでに 2 と 3 はペアになっているので、5 が1個あまる。 n=5 とすれば $180n = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900 = 30^2$ 。 検算： $\sqrt{900} = 30$ (自然数) ○

知技 3 平方根の計算（乗除） [各3点／計12点]

(1)	$9\sqrt{2}$	$\sqrt{27} \times \sqrt{6} = \sqrt{162} = \sqrt{81 \times 2} = 9\sqrt{2}$ (最簡) 別解: $3\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{18} = 3 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ (先に簡単にするほうが速い)
(2)	-4	符号は $(+) \div (-) \times (+) = (-)$ 。 $\sqrt{48} \div \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{\frac{48 \times 2}{6}} = \sqrt{16} = 4$ よって -4
(3)	$5\sqrt{3}$	符号は $(-) \times (+) \div (-) = (+)$ 。 $\sqrt{\frac{50 \times 21}{14}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (最簡) $50 \times 21 \div 14$ は、先に $21 \div 14 = \frac{3}{2}$ と約分して $50 \times \frac{3}{2} = 75$ 。
(4)	$-3\sqrt{2}$	$\frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ $\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3}) = -2 \times 3 = -6$ $-6 \div \sqrt{2} = \frac{-6}{\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$ (分母の有理化を忘れない)

知技 4 平方根の計算（加減・展開） [各3点／計18点]

(1)	$-3\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$ を文字 a のように扱う。 $5a - 8a = -3a$ と同じ。 よって $(5-8)\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$ 。
(2)	$6\sqrt{3}$	まず全部 $\sqrt{3}$ にそろえる。 $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ $5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (5-3+4)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
(3)	$5\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$	分配法則でかっこを外す。 $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5} \times \sqrt{15} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ は中がちがうので、これ以上まとめられない。
(4)	$10 + 2\sqrt{21}$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を使う。 $=(\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$ $21 = 3 \times 7$ に平方因数はないので $\sqrt{21}$ が最簡。
(5)	$-9 + 2\sqrt{6}$	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ の形。 x を $\sqrt{6}$ とみる。 $=(\sqrt{6})^2 + (-3+5)\sqrt{6} + (-3) \times 5 = 6 + 2\sqrt{6} - 15 = -9 + 2\sqrt{6}$
(6)	$-8 + 6\sqrt{2}$	前半は和と差の積 $(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$ 後半は $(\sqrt{2} - 3)^2 = 2 - 6\sqrt{2} + 9 = 11 - 6\sqrt{2}$ $3 - (11 - 6\sqrt{2}) = 3 - 11 + 6\sqrt{2} = -8 + 6\sqrt{2}$ ひく式のかっこを外すとき、 符号の変わり忘れ がいちばん多い失点。

知技 5 因数分解 [各3点／計12点]

(1)	$2(x+2y)(x+3y)$	まず共通因数 2 をくくり出す。$2(x^2+5xy+6y^2)$ かけて 6、たして 5 になるのは 2 と 3 $\rightarrow 2(x+2y)(x+3y)$ 検算 (展開) : $2(x^2+3xy+2xy+6y^2)=2x^2+10xy+12y^2$ ○ / 共通因数のくくり出しを忘れると満点にならない。
(2)	$(3x-4y)^2$	$9x^2=(3x)^2$、$16y^2=(4y)^2$、$24xy=2 \times 3x \times 4y$ なので $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ の形。 検算 : $(3x-4y)^2=9x^2-24xy+16y^2$ ○
(3)	$(x-6)(x+5)$	$x+2=M$ とおく (おきかえ)。 $M^2-5M-24=(M-8)(M+3)$ M をもどして $(x+2-8)(x+2+3)=(x-6)(x+5)$ 検算 : $(x-6)(x+5)=x^2-x-30$。もとの式も $(x+2)^2-5(x+2)-24=x^2+4x+4-5x-10-24=x^2-x-30$ ○ / もどしたあとにかっこの中を計算するところまでが答え。
(4)	$(x+y+4)(x-y-4)$	後ろの3項をまとめる (符号に注意)。 $x^2-(y^2+8y+16)=x^2-(y+4)^2$ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ の形なので、$A=x$、$B=y+4$ として $=\{x+(y+4)\}\{x-(y+4)\}=(x+y+4)(x-y-4)$ 検算 : $x^2-(y+4)^2=x^2-y^2-8y-16$ ○

思考・判断・表現 (36点) の解答・解説

考 1 循環小数・有効数字・近似値 [各3点／計9点]

(1)	$\frac{4}{11}$	$x=0.363636\cdots$ とおく。くり返しが2けたなので 100倍する。 $100x=36.363636\cdots$ $x=0.363636\cdots$ 辺々ひいて $99x=36 \rightarrow x=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$ 検算 : $4 \div 11=0.3636\cdots$ ○ (約分を忘れない)
(2)	$3.84 \times 10^5 \text{ m}^2$	有効数字3けたなので、上から3けた「3、8、4」をとって 3.84。 $384000=3.84 \times 100000=3.84 \times 10^5$ 0 を数えて 10 の何乗かを決める。38.4×10^4 は「整数部分が1けた」の条件に合わないので不可。
(3)	0.2236	小数のままでは与えられた値が使えない。分数に直すのがポイント。 $\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{5}{100}}=\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{2.236}{10}=0.2236$ 検算 : $0.2236^2=0.049996\cdots \approx 0.05$ ○ / $\sqrt{0.05}=\sqrt{\frac{1}{20}}$ と考えて $\sqrt{2}$ を使おうとすると行きづまる。分母が 100 ($=10^2$) になるように直す。

考 2 整数部分と小数部分 [各3点／計6点]

(1)	a=3	13をはさむ平方数をさがす。9<13<16だから $\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16} \rightarrow 3<\sqrt{13}<4$ よって整数部分はa=3。(このとき小数部分は $b=\sqrt{13}-3 \approx 0.606$ で、$0<b<1$ を満たす○)
(2)	13	$b=\sqrt{13}-3$。そのまま代入せず、先に因数分解する。 $b^2+6b+9=(b+3)^2$ ここに $b+3=(\sqrt{13}-3)+3=\sqrt{13}$ を代入して $(\sqrt{13})^2=13$ (小数部分) = (もとの数) - (整数部分) という関係が使えるかがこの問題の山。

考3 $\sqrt{\quad}$ の中が自然数になる条件 [各3点/計6点]

(1)	$n=20$	$20=2^2 \times 5$. $20n$ が平方数になるには、あまっている5をペアにすればよいので $n=5 \times (\text{自然数})^2$ の形 $\rightarrow n=5, 20, 45, 80, \dots$ このうち2けたでもっとも小さいのは $n=20$ 。 検算: $20 \times 20 = 400 = 20^2$ なので $\sqrt{400} = 20$ (自然数) ○ / $n=5$ は1けたなので条件に合わず不適。
(2)	$n=10, 40, 90, 360$	$360=2^3 \times 3^2 \times 5$. $\frac{360}{n}$ が平方数になればよい。360の約数のうち平方数は1、4、9、36の4つ。 $\frac{360}{n} = 36$ のとき $n=10$ / $=9$ のとき $n=40$ / $=4$ のとき $n=90$ / $=1$ のとき $n=360$ (16、25は360の約数ではないので、そうなる自然数 n は存在しない) 検算: $\sqrt{36}=6, \sqrt{9}=3, \sqrt{4}=2, \sqrt{1}=1$ すべて自然数 ○

考4 式の値 [各3点/計6点]

【共通の準備】 まず $x+y, x-y, xy$ を先に求めておく。 $x+y = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \quad x-y = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ $xy = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$		
(1)	$\sqrt{15}$	$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$ (15=3×5に平方因数はないので最簡)
(2)	4	$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2 \times \frac{1}{2} = 5-1=4$ 検算(概数): $x \approx 1.986, y \approx 0.252$ より $x^2+y^2 \approx 3.944+0.063 \approx 4.01$ ○

■ **ポイント** x, y をそのまま代入して2乗すると計算が大変になる。**対称式は $x+y$ と xy で表せる**ので、先にこの2つを求めるのが定石。(2)の変形 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ は必ず覚えておくこと。

考5 正方形の周りの長さの差 [3点]

答	$4\sqrt{2} \text{ cm}$	立式の根拠: 正方形の1辺の長さは(面積)の 正の平方根 (長さは負にならないので負の平方根は 不適)。周りの長さ=4×(1辺)。 アの1辺= $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ (cm) $\rightarrow$ 周りの長さ= $4 \times 4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$ (cm) イの1辺= $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ (cm) $\rightarrow$ 周りの長さ= $4 \times 5\sqrt{2}=20\sqrt{2}$ (cm) 差は $20\sqrt{2}-16\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ (cm) ($\approx 5.66\text{cm} > 0$ で、イのほうが長いという条件に適する ○) 別解: 1辺の差が $5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\sqrt{2}$ cm なので、周の差はその4倍で $4\sqrt{2}$ cm。 ※ $\sqrt{50}-\sqrt{32}=\sqrt{18}$ としてしまう誤りに注意 ($\sqrt{\quad}$ どうしはそのままひけない)。
---	------------------------	--

考6 3直線で囲まれた三角形 [各3点/計6点]

(1)	$(-3-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$	$\ell: y=x+3$ と $n: y=-\sqrt{3}$ を連立する。 $x+3=-\sqrt{3} \rightarrow x=-3-\sqrt{3}$ よって交点は $(-3-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 検算: $x+3=(-3-\sqrt{3})+3=-\sqrt{3} \circ$
(2)	$12+6\sqrt{3}$	m と n の交点は $-x+3=-\sqrt{3} \rightarrow x=3+\sqrt{3}$ より $(3+\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ℓ と m の交点は $x+3=-x+3 \rightarrow x=0, y=3$ より $(0, 3)$ 直線 n 上の辺を底辺とみると 底辺 $= (3+\sqrt{3}) - (-3-\sqrt{3}) = 6+2\sqrt{3}$ 高さ $= 3 - (-\sqrt{3}) = 3+\sqrt{3}$ (頂点 $(0,3)$ と直線 n の y 座標の差) 面積 $= \frac{1}{2} \times (6+2\sqrt{3}) \times (3+\sqrt{3}) = (3+\sqrt{3}) \times (3+\sqrt{3}) = (3+\sqrt{3})^2$ $= 9+6\sqrt{3}+3 = 12+6\sqrt{3}$ 検算 (概数) : 底辺 $\div 9.46$ 、高さ $\div 4.73 \rightarrow$ 面積 $\div 22.4$ 。 $12+6 \times 1.732 \div 22.4 \circ$

知識・技能 64点 + 思考・判断・表現 36点 = 合計 100点 (小問 37問)